8П

УДК 519.1

В.І. Петренюк
Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград, Україна

Структура площинних графів із множиною точок, досяжною на торі. Частина I.

Вивчення структури площинних графів, що мають певну множину точок X, таку, що $t_G(X)>1$ і досяжну на торі δ_1, є метою статті.

Вступ

Розглянемо задачу побудови скінченного простого графа G, G = (V,E) із заданими наперед родом P та числом досяжності R множини вершин, де P, R > 0. У світлі теорії мінорів Сеймура та Робертсона, яка спирається на теорему, за якою для заданого графа із нескінченної множини скінченних графів знайдеться інший граф, що буде мінором заданого графа. Відзначимо, що мінор означатиме результат виконання операцій стягування в точку чи видалення певної послідовності ребер скінченного простого графа G доти, доки його сутність пов'язана із поставленою задачею. А саме для випадку нашої задачі із параметрами P = 1, R = 1 такими є графи Куратовського-Понтрягіна $K_{3,3}$ та K_5. Згідно з [6] наш спосіб побудови полягатиме в заміні деяких ребер u_i (чи їхньої частини) графа G', гомеоморфного $K_{3,3}$ чи K_5, на графи $K_{2,3}$ та K_4, які приєднуються до графа $G\backslash u_i$, де i = 1,2,...m, шляхом ототожнення граничних вершин (чи двох внутрішніх точок) довільного ребра u_i із двома заданими вершинами графів $K_{2,3}$ чи K_4. Точніше будемо розглядати такий спосіб приєднання як одне φ-перетворення графів G' та H на граф G, де H = $K_{2,3}$ чи H = K_4, визначене за двома точками, розуміючи під точкою або кінцеву вершину ребра, або внутрішню точку ребра. Матимемо твердження: якщо площинний граф G, отриманий зазначеним вище способом, то число досяжності множини вершин не перевищуватиме m + 1.

Основна частина

Основні визначення та позначення взяті із $[1],[2]$.

Визначення 1. Позначимо через $F(G,\delta)$ множину усіх неізоморфних 2-кліткових вкладень $f, f: G\to\delta$ графа G в 2-многовид δ. Будемо говорити, що відносно вкладення $f, f\in F(G,\delta)$ множина X, складена з точок графа G, має число досяжності $t_G(X,f')$, де $t_G(X,f')=t'$, якщо існує найменша за включенням підмножина $\{s_i\}_1^{t'}$ множини $\delta(G,f)$, що задовольняє умові:

$$(\forall i,j)(\exists X_i)(i\neq j, i,j=1(1)t')(X_i\subset X, X_i\neq\varnothing)\left[\left(f(X_i)\subset ds_i\right)\&\left(\sum_{i=1}^{t'} f(X_i)\subseteq f(X)\right)\right].$$

Визначення 2. Будемо говорити, що множина X має на δ число досяжності $t_G(X,\delta)$, якщо виконується умова: $t_G(X,\delta)=\min t_G(X,f)$, де $\forall f$, $f\in F(G,\delta)$, причому вкладення f, при якому досягатиметься мінімум, назвемо вкладенням, реалізуючим число $t_G(X,\delta)$. Множина X зветься досяжною на δ, якщо виконується рівність $t_G(X,\delta)=1$.

Позначення 1. Позначимо через найменшу по включенню підмножину $\{s_i\}_1^t$ множини $\delta(G,f)$, що задовольняє умові визначення 1, де вкладення f реалізує t, $t=t_G(X,\delta)$.

Надалі будемо вважати, що G – блок, а вкладення $f, f:G\to\delta_0$ реалізує число досяжності $t_G(X)$, де $t_G(X)=t$, $\theta_G(X)$ – характеристика множини X, наведена в $[3]$. Вважатимемо, що $\theta_G(X)=0$. Через s_0 позначимо зовнішню грань графа $f'(G)$. Будемо позначати через $f, f:G\to\delta_1$ таке вкладення, при якому множина X досяжна на торі δ_1.

Зауваження 1. Будемо позначати через a, b замкнуті криві тора, не гомотопні 0, та будемо називати ці геодезичні криві тора a меридіаном тора, b – паралеллю тора; відношення гомотопії позначимо ~.

Визначення 3. Будемо позначати через $H_{ij}, i<>j$, найменший за включенням підграф графа G, що містить ds_iUds_j, де $s_i,s_j\in\delta(G,f)$, та частинний підграф H', стягнутий відносно $X_{H'}$ до наступних п'яти графів, де $X_i=X\cap ds_i, X_j=X\cap ds_j$.

1. $K_{2,3}$, у якого вершини степені 2 мають своїми прообразами точки $x_{i'}$, що задовольняють відношенню: $(\forall k)(k=i,j)\Big[\big(\{x_{i'}\}_1^3\cap X_k\neq\varnothing\big)\&\big(\{x_{i'}\}_1^3\subseteq X_iUX_j\big)\Big]$.

2. $K_4^{(1)}$, де $K_4^{(1)}=K_4$, у якого точки y_1,y_2 належать несуміжним ребрам, мають прообразами $x_1\in X_i, x_2\in X_j$.

3. K_4, усі вершини якого мають своїми прообразами точки $x_{i'}, i'=1(1)4$, які задовольняють відношенню: $(\forall k)(k<>i,j)\Big[\big(\{x_{i'}\}_1^4\cap X_k\neq\varnothing\big)\&\big(\{x_{i'}\}_1^4\subseteq X_iUX_j\big)\Big]$.

4. K_4 * -ϕ – образ графа $z_4+St_5(y_0)$, отриманий в результаті φ-перетворення:

$$\text{ц}\left(\left(z_4+\mathrm{St}(y_0),\sum_{i=1}^{4}(a_i+y_i)\right)\right)==\left(K_4^*,\{a_1^*\}_1^4\right),$$

де z_4^0 – простий цикл довжини 4, $z_4=\{a_i\}_1^4, St(y_0)$ – зірка із центром в точці y0, $St_4(y_0)=\{y_i\}_0^4$. Дві точки графа $K_4^*, y_1\in(a_1*y_0), y_0\in(a_3*y_0)$ мають прообразами x_1,y_1, які задовольняють відношенню: $(\forall k,k=i,j)\big(\{x_i\}_1^2\cap X_k\neq\varnothing\big)$.

5. $K_4^{*(1)}$, отриманого шляхом наступного ϕ-перетворення:

$$\text{ц}\left(K_1^*\cup(a_2a_4),\sum_{k=1}^{2}\left(a_{2k}^*+a_{2k}\right)\right)==\left(K_4^{*(1)},\{a_k^{**}\}_1^2\right)$$

і такого, що його вершини a_1^*,a_3^* мають своїми прообразами точки $x_{1,}x_2$, відповідно, задовольняють співвідношенню: $(\forall k,k=i,j)\big(\{x_{i'}\}_1^2\cap X_k\neq\varnothing\big)$.

Лема 1. Нехай X – скінченна множина точок площинного графа G, де $t_G(X)=t, t>1, \theta_G(X>0), S_G\{s_i\}_1^t$, задане вкладення $f, f:G\to\delta_1$ реалізує $t_G(X,\delta_1)$, $M=\{H_{ij}\}$ – множина підграфів H_{ij} графа G, які задовольняють визначенню 3. Якщо множина X досяжна на δ_1, то мають місце наступні твердження:
а) кожний підграф $H, H\in M$ графа G містить простий цикл z, такий, що $f(z)$ – замкнута крива, не гомотопна 0;
б) якщо кожен підграф $H,H\in M$ має ту властивість, що довільний його простий цикл z має образ $f(z)$ або гомотопний 0, або гомотопний a (a – геодезична крива тора), то тоді існує простий цикл z' графа G, такий, що:

1) z' не входить в UH_{ij}, де $\forall H_{ij}\in M$;

2) $f(z')$гомотопний b-другій геодезичній кривій тора;

в) якщо існують підграфи H',H'' з множини $M, H'\cap H''=\varnothing$, то кожний простий цикл цих підграфів графа G має образ, гомотопний або 0, або одній і тій же геодезичній кривій тора;
г) якщо існують прості цикли z_i графа H_i, де $i=1,2,3,\{H_i\}_1^3\subseteq M$, які задовольняють умові: $(f(z_1)\sim f(z_2)\sim a)\&(f(z_3)\sim b)$, то маємо співвідношення:

$$(\forall_i, i=1,2)(z_i\cap z_3\neq\varnothing).$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Покладемо, що множина X досяжна на δ_1. Доведемо твердження а). Припустимо, що деякий підграф $H\in\in M$ не містить простого циклу z, такого, що $f(z)=\sim$ а або $f(z)=\sim b$. Тоді вкладення $f\mid H:H\to\delta_1$ є вкладенням підграфа H в площину δ_0. Тоді має місце $t_H(X\cap H)=2$, причому вкладення $f\mid H$ реалізує $t_H(X\cap H)$ на δ_0 та δ_1. Це означає, що має місце $t_G(X,\delta)>2$, що неможливо з умови досяжності X на δ_1. Припущення неправильне. Твердження а) доведено. Доведемо твердження б). Нехай кожний підграф H графа G має властивість: кожен простий цикл $z,z\in H$ має образ $f(z)$, який є кривою на торі, що може бути стягнута або в точку, або до кривої а. Тоді граф $f(G)$ повинен мати простий цикл z', такий, що $f(z')\cong b$ та $z'\in UH_{ij}$, де об'єднання по всіх графах H_{ij}. Якби не існувало такого z', тоді вкладення $f:G\to\delta_1$ не буде 2-клітковим, що суперечить умові. Припущення неправильне. Твердження б) доведено. Доведемо твердження в). Нехай H',H'' не перетинаються між собою та належать до M. Припустимо, що існують такі прості цикли z',z'', які належать до H',H'' відповідно, та крива $f(z')$ гомотопна а, крива $f(z'')'$ гомотопна b. Так як криві a,b мають спільну точку, то цикли z',z'' мають спільну точку, що суперечить умові. Припущення неправильне. Твердження в) доведено. Твердження г) очевидне. Доведення леми закінчено.

Наслідок 1.1. Якщо множина X досяжна на торі, то для кожної підмножини $S_G(X)$, що співпадає із $\{s_i,s_j,s_k\}$, де $i<>j, i<>k, k<>j$, можливі тільки наступні випадки:

а) границі цих клітин гомотопні одній і тій же кривій тора;

б) границі двох клітин гомотопні одній кривій, а границя третьої гомотопна другій геодезичній кривій тора.

Позначення 3. Покладемо, що $i=1, j=2, k=3$. Позначимо через M_3 множину $\{H_{12}, H_{13}, H_{23}\}$, через H підграф $U_{ij=1,1}H_{ij}$. Позначимо через F_{ij} такий підграф графа G, що $F_{ij} = Uds'$, де об'єднання за всіма елементами s' множини N_{ij}, де $N_{ij} = \{s'k\}$ найбільша за включенням підмножина множини $\delta_0(G, f) \setminus S_G(X)$, де вкладення f реалізує $t_G(X)$, та яка має наступні властивості:

а) $(\forall k, = 1(1)n)\left[\left(ds_{ij} \cap G^1 \neq \varnothing\right) \& \left(ds'_k \cap ds'_{k+1} \cap G^1 \neq \varnothing\right) \& \left(ds'_n \cap ds'_j \cap G^1 \neq \varnothing\right)\right]$;

б) зовнішня грань s_{ij} графа $f|_{F_{ij}}(F_{ij})$ має границю ds_{ij}, гомотопну 0;

в) підграф $H_{ij}, H_{ij} = F_{ij} \cap ds_i \cap ds_j$ графа G містить простий цикл, гомотопний одній з гомотопних кривих тора;

г) $(\exists 1')\left(1' = 1(1)n_{ij}\right)\ \left[\left(ds'_{1'} \cap ds_0 \cap G^1 \neq \varnothing\right)\right]$, де s_0 – зовнішня грань графа $f'(G)$, $f: G \to \delta_0$;

д) $(\forall k', j')\left(k' = 1(1)n_{ij}\right)\left(s_{j'} \in S_G(X) \setminus \{s_i, s_j\}\right)$.

Зауваження 2. В тому випадку, коли $N = 0$, будемо вважати, що $F_{ij} = ds_i \cap ds_j$. Розглянемо випадок А. З точністю до перенумерації існують тільки наступні підвипадки:

а.1) $(\forall, i, j)(i, j = 1(1)3)(ds_i \cap ds_j = 0)$;

а.2) $(ds_1 \cap ds_2 <> 0) \& (ds_3 \cap (ds_1 U ds_2) = 0)$;

а.3) $(ds_1 \cap ds_2 <> 0) \& (ds_3 \cap ds_2 <> 0) \& (ds_1 \cap ds_3 = 0)$.

Оскільки $\theta_G(G) = 0$, то інші підвипадки неможливі.

Лема 2. Припустимо, що $F_{12} = F_1, F_{23} = F_2, F_{13} = F_3$ та має місце підвипадок а.1. Виконуються наступні твердження:

0) Для кожної пари 2-кліток (s_i, s_j), де $i < j, i, j = 1(1)3$, існує підграф H_{ij}, який разом з підмножиною $X \cap (ds_i U ds_j)$ задовольняє визначенню 3;

1) Існує пара простих циклів z_1 та z_2 графа G, які мають найменшу довжину та разом з парою підграфів (F'_1, F'_3), де $F'_i \in \{F_j\}_1^3$, задовольняють співвідношенню 3.

$(\forall i, j)(i = 1,2,3)(z_i \cap F'_j = C_{ji})$, де C_{ij} – простий ланцюг графа G, такий, що

$$C_{ij} \in ds_i, C_{11} + C_{12} = \partial s_{12} \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \partial s_i, C_{21} + C_{22} = \partial s_{23} \setminus \bigcup_{i=2}^{3} \partial s_i, C_{31} + C_{33} = \partial s_{13} \setminus (\partial s_1 \cup \partial s_3),$$

де s_{ij} – зовнішня грань графа $(f | F_{ij})(F_{ij})$, а вкладення $f': G \to \delta_0$ реалізує $t_G(X)$;

2) Існує пара різних найкоротших простих ланцюгів $C_i, i = 1,2$ графа G, де $C_i = C_G(a_{i1}, a_{i2})$, яким притаманна властивість: для кожного простого ланцюга C_i знайдеться інший простий ланцюг $C, C \in \bigcup_{i=1}^{2} F'_i$, такий, що пара (C, C_i) розділяє на

площині δ_0 деякі елементи множини $X\cap\left(\bigcup_{i=1}^{3}ds_i\right)$, які є точками простого циклу z графа G, де $z=\bigcup_{i=1}^{3}ds_i\setminus\bigcup_{j=1}^{2}\left(F_j\left(C_{j1}\bigcup C_{j2}\right)\right)$, де F'_j – нетривіальний граф;

3) Підмножина $X_1\cap\left(\bigcup F_i\right)$ складається тільки з кінцевих вершин ланцюгів C_{ij}, де $i,j=1,2$.

Доведення. Нехай виконується умова леми 2. Покладемо для визначеності, що ds_i, де $i=1,2,3$ можуть стягуватися до замкнутої кривої а. Твердження 0) випливає з теореми 1 [4]. Доведемо твердження 1). Розглянемо наступні підграфи графа G: $C_{11}+C_{1i}=\partial s_{12}\setminus\bigcup_{i=1}^{2}\partial s_i$, $C_{21}+C_{22}=\partial s_{23}\setminus\bigcup_{i=2}^{3}\partial s_i$, $C_{31}+C_{33}=\partial s_{13}\setminus(\bigcup_{i=2}^{3}\partial s_i\setminus\partial s_2$, де s_{ij} – зовнішня грань графа $\left(f\mid F_{ij}\right)\!\left(F_{ij}\right)$, а вкладення $f':G\to\sigma_0$ реалізує $t_G(X)$, C_{ij} – простий ланцюг графа G (можливо, що довжина деяких з цих ланцюгів дорівнює 0, тобто ланцюг вироджується в точку). В силу умови досяжності множини X на δ_0 та умови підвипадку а.1) існує простий цикл z_0 графа G, який містить точно два підграфи з множини $\left\{\left\{C_{ij}\right\}_{j=1}^{3}\right\}_{i=1}^{2}$. Для визначеності покладемо, що $C_{11}+C_{12}+C_{21}+C_{22}$ належить до z_0. За допомогою вкладення $f,f:G\to\delta_0$ підграфи $F_i,i=1,2$ вкладені у тор так, що кожен простий цикл, що належить підграфам $f\left(F_1\bigcup\left(\bigcup_{1}^{2}ds_i\right)\right),f\left(F_2\bigcup\left(\bigcup_{2}^{3}ds_i\right)\right)$, мав би образом криву, стягнуту або в точку, або до однієї і тієї геодезичної кривої тора. Це можливо тільки тоді, коли:

а) існують прості цикли z_1,z_2 графа G найменшої довжини та разом з парою $\left(F'_1,F'_2\right)$, де $\left\{F'_i\right\}_1^2\subseteq\left\{F_j\right\}_1^3$, мають властивість: $z_i\cap F'_j=C_{ij}$, де $i=1,2mj=1,2,3$;

б) множина $X\cap\left(F_1UF_2\right)$ може містити тільки кінцеві вершини ланцюгів C_{ij}. Твердження 1) доведено.

Доведемо твердження 2). Припустимо, що в графі G не існує вказаних ланцюгів C_i. Тоді із твердження 1) випливає, що вкладення $f',f':G\to\delta_0$ реалізує t, де $t=t_G(X)$, та має властивість: $f'(X)\subseteq z_1Uz_2$. Це включення суперечить визначенню певного числа $t_G(X)$. Припущення неправильне. Це означає існування пари різних простих ланцюгів C_i графа G, де $C_i=C_G\left(a_{i1},a_{i2}\right),i=1,2,$ таких, що:

а) для кожної C_i знайдеться простий ланцюг C, де $C\in\left(\bigcup_{i=1}^{2}F'_i\right)$такий, що пара ланцюгів $\left(C_i,C\right)$ розділяє на площині деякі елементи множини $X\cap\left(\bigcup_{i=1}^{3}ds_i\right)$, притаманні простому циклу $z,z=\left(\bigcup_{i=1}^{3}ds_i\right)\setminus\bigcup_{j=1}^{2}F'_j\setminus\sum_{j=1}C_{ij}$. Тобто $C_1\cap C_2\neq\varnothing$. Твердження 2) доведено. Доведення леми 2 закінчено.

Лема 3. Нехай виконується підвипадок а.2 та виконуються інші позначення леми 2. Тоді мають місце наступні твердження:

0) Виконуються твердження 0), 1), 2) леми 2;

1) Якщо виконується співвідношення:

$$[(F_1 \cap F_2 = \varnothing\ ) \vee ((F_1 \cap F_2 \neq \varnothing) \,\&\, ((\exists i = 1,2)(|F_1 \cap z_i^0| >= 1))],$$

то має місце твердження 3) леми 2.

2) Якщо виконується умова: $(\forall\ i, i=1,2)[(F_1 \cap z_i = \{a_i\}) \,\&\, (|F_1 \cap F_2| <> 0)]$, то мають місце наступні твердження:

2.1) Якщо існує простий цикл z, $z \subset F_2 \subset G$, який задовольняє наступним умовам:

а) $z \cap z' = F_2 \cap z'$;

б) $F_1 \cap z' \cap ds_1 \subset z \cap ds_1 \cap F_1$;

в) $F_2 \cap z' \cap ds_3 \subseteq z \cap ds_3 \cap F_2$;

де z' – один і той же цикл із множини $\{z_i\}_1^2$, то має місце наступне включення:

$$f(X \setminus (U_1^3\ ds_i\ )) \subset (U\, ds_i \setminus U_1^3\ F_i\ )\ U\ (\textstyle\sum_1^3 \partial S_i);$$

2.2) Якщо не існує вказаного циклу z, то має місце твердження 3) леми 2.

2.3) Якщо існує пара циклів (z'_1, z'_2) підграфа F_2 графа G, яка задовольняє умовам а), б), в) твердження 2.1), то має місце включення:

$$f(X \cap (U_1^3\ ds_i)) \subset (U_1^3\ ds_i \setminus U_1^2\ F_i\ )\ U\ (\ U\ (z'_i \cap (U_1^3\ ds_j\ ))).$$

Примітка. У наведених вище твердженнях підграф F_1 графа G може бути тривіальним та всі твердження леми 2 справедливі з точністю до перенумерації клітин s_i.

Доведення. Нехай виконується підвипадок а.2). Неважко впевнитися у справедливості тверджень 0), 1), 2) леми 2. Покажемо, що один із підграфів F_i, i = 1, 2, 3, графа G може бути тривіальним. Дійсно, якщо припустити, що $F_1^0 = \{a_1\}$, $F_2^0 = \{a_2\}$, тобто ці графи тривіальні, то для пари (s_1, s_2), (s_2, s_3) не виконується твердження 0), тобто суперечність. Таким чином, тільки один з підграфів F_i (вважатимемо, що це F_1) може бути тривіальним.

Доведемо твердження 1). Нехай виконується співвідношення цього твердження. Можливі такі варіанти: 1) $F_1 \cap F_2 = \varnothing$; 2) $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ та підграф F_1 має більше однієї спільної вершини з циклами z_1, z_2, наведеними у твердженні 1) леми 2. В силу умови випадку А та досяжності множини $X \cap (U_1^3\ ds_i)$ на торі маємо, що вкладені підграфи $f\,|\,F_i(F_i)$, i = 1, 2, мають наступну властивість: кожен простий цикл $z_i \subset ds_i\ U\ f|F_i\ (F_i)$, i = 1,2, стягується або до однієї і тієї геодезичної кривої тора, або в точку. Тоді виконується твердження 3) леми 2.

Доведення твердження 2) проведемо шляхом розгляду його частин.

Нехай виконується співвідношення, наведене в умові твердження 2). Тоді кожен цикл z_i має з підграфом F_i, i = 1,2, тільки одну спільну вершину a_i, причому F_1 та F_2 перетинаються один з одним. Доведемо 2.1) леми 3. Покладемо, що підграф F_2 має простий цикл z, який задовольняє умові а) твердження 2.1 леми 2, та для визначеності вважатимемо, що z' = z_1. Згідно з прийнятими в твердженні 1) леми 2 маємо, що цикл z містить простий ланцюг C_{21}, де $C\ C_{21} = CC_G(a_{11},a_{12})$, $a_{1i} \in F_i \cap z_1$, i = 1, 2, причому $a_{11} \in ds_1$, $a_{12} \in ds_3$. В силу умови досяжності на торі б$_1$ та умови випадку А

маємо вкладення f:G ->б$_1$, побудоване наступним чином: підграфи $f \mid F_i\ (F_i^1 \setminus z^1)\ U\ ds_i$, де i = 1, 2, графа G містять прості цикли, що стягуватимуться або до однієї і тієї геодезичної кривої тора, або в точку, а f(z) – простий цикл, який стягуватиметься до іншої геодезичної тора. Тоді отримаємо включення: $f(X \cap (U_1^3\ ds_i)) \subset (U_1^3\ ds_i \setminus U_1^3\ F_i)\ U\ (z \cap (U_1^3\ ds_i))$, що й треба було довести.

Доведемо 2.3). Доведення аналогічне попередньому та відрізняється тільки тим, що цикли $f(z'_i)$ i = 1, 2, стягуватимуться до однієї і тієї геодезичної кривої, а кожний простий цикл підграфа $f \mid F_i\ (F_i \setminus (z')^1)\ U\ ds_i^1$ стягуватиметься або в точку, або до однієї і тієї геодезичної кривої тора, відмінної від кривої, до якої стягуватимуться цикли $f(z_i)$. Тоді маємо включення:

$$f(X \cap (U_1^3\ ds_i)) \subset (U_1^3\ ds_i \setminus U_1^2\ F_i)\ U\ (U_1^2\ (z'_1 \cap (U_1^3\ ds_j))),$$

що й треба довести. Доведення твердження 2.2 випливає з доведення 2.1. Твердження 2) доведено.

Висновки

Отримані результати мають бути використані в другій частині цієї статті.

Література

1. Хоменко Н.П. Топологические аспекты теории графов: Препр. / ИМ АНУ. – Киев, 1971.
2. Хоменко М.П. φ-перетворення графів: Препр. / ИМ АНУ. – Киев, 1973.
3. Хоменко Н.П. Островерхий Е.Б. Существенные элементы и род графа: Препр. «Минимальные вложения графов» / ИМ АНУ. – Киев, 1972.
4. Петренюк В.И. О струкруре плоских графов с заданным числом досягаемости заданного множества точек. – Деп. в УкрНИИТИ № 2245-Ук86 22.09.1986.
5. Петренюк В.И. Об оценке рода специальных графов. – Деп. в УкрНИИТИ № 2259-Ук86 22.09.1986.
6. Петренюк В.І. Новий підхід до подання графів // Збірник праць 4-го міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». – Кіровоград, 18 – 17.10.2007. – С. 112.

В.И. Петренюк

Структура плоскостных графов со множеством точек, достижимым на торе. Часть I

Изучение структуры плоскостных графов, которые имеют определенное множество точек X, такое, что $t_G(X) > 1$ и достижимое на торе δ_1, является целью этой статьи.

Стаття надійшла до редакції 09.07.2008.